ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1981

В.Н.Худенко

МНОГООБРАЗИЯ КОНИК В P_4 С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В четырехмерном проективном пространстве рассматривается многообразие $(3,3,4)^2_I$ коник Q_1 с неопределенными фокальными поверхностями. Найдена инвариантная двумерная квадрика пространства $\mathcal{P}_4$, которой принадлежат коники Q_1 многообразия $(3,3,4)^2_I$.

Рассмотрим многообразие $(3,3,4)^2_I$ коник Q_1 в $\mathcal{P}_4$. Отнесем проективное пространство $\mathcal{P}_4$ к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,\dots,A_5\}$. Вершины A_1,A_2,A_3 поместим в двумерной плоскости коники Q_1, причем A_1 и A_2 поместим на конику Q_1, а вершина A_3 будет полярно сопряжена точкам A_1 и A_2 относительно коники Q_1. При надлежащей нормировке получим, что уравнения коники приводятся к виду:

$$\begin{cases}(x^3)^2-2x^1x^2=0,\\ x^a=0,\end{cases}\qquad a=4,5. \tag{1}$$

Выберем формы $\omega_\alpha \overset{def}{=} \omega_\alpha^5$ $(\alpha=1,2,3)$ в качестве базисных форм многообразия $(3,3,4)^2_I$ коник Q_1. Фокальные точки коники Q_1 и фокальные семейства многообразия $(3,3,4)^2_I$ определяются уравнениями

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0,\quad x^5=0,$$

$$x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2)+(x^1)^2\omega_1^2+(x^2)^2\omega_2^1+\omega_3^3(x^3)^2+$$

$$+x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3)+(\omega_3^1-\omega_2^3)x^2x^3=0, \tag{2}$$

$$x^1\omega_1+x^2\omega_2+x^3\omega_3=0,$$

$$x^1\omega_1^4+x^2\omega_2^4+x^3\omega_3^4=0.$$

Согласно [1], конгруэнцией $(Q_1)_0$ назовем многообразие $(3,3,4)^2_I$, у которого любые две смежные коники имеют общую точку. Следовательно, система (2) эквивалентна системе

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0,\quad x^5=0,$$

$$x^1\omega_1+x^2\omega_2+x^3\omega_3=0. \tag{3}$$

Значит

$$(\alpha x^1+\beta x^2+\gamma x^3)(x^1\omega_1+x^2\omega_2+x^3\omega_3)\equiv$$

$$\equiv\{x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2)+(x^1)^2\omega_1^2+(x^2)^2\omega_2^1+\omega_3^3(x^3)^2+$$

$$+x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3)+(\omega_3^1-\omega_2^3)x^2x^3\}, \tag{4}$$

$$\ell(x^1\omega_1+x^2\omega_2+x^3\omega_3)\equiv x^1\omega_1^4+x^2\omega_2^4+x^3\omega_3^4,$$

где α,β,γ,ℓ – некоторые функции от главных и вторичных параметров. Из (4) следует

$$\omega_1^4=\ell\omega_1,\quad \omega_2^4=\ell\omega_2,\quad \omega_3^4=\ell\omega_3,$$

$$\omega_1^1+\omega_2^2=\alpha\omega_2+\beta\omega_1,\quad \omega_1^2=\alpha\omega_1,$$

$$\omega_3^2-\omega_1^3=\alpha\omega_3+\gamma\omega_1,\quad \omega_3^3=\gamma\omega_3, \tag{5}$$

$$\omega_3^1-\omega_2^3=\beta\omega_3+\gamma\omega_2,\quad \omega_2^1=\beta\omega_2.$$

Из анализа замыкания системы (5) получим, что возможна фиксация

$$\alpha=\beta=\gamma=0,\quad \ell=1. \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$\omega_1^1+\omega_2^2=0,\quad \omega_3^2-\omega_1^3=0,\quad \omega_3^1-\omega_2^3=0. \tag{7}$$

Замкнув (7), получим:

$$\omega_4^1+\omega_5^1=b\omega_2,\quad \omega_4^3+\omega_5^3=-b\omega_3,$$

$$\omega_4^2 + \omega_5^2 = b\,\omega_1, \quad db - b(\omega_4^4 + \omega_5^5) = 0 \qquad (8)$$

Рассмотрим случай, когда $b = 1$.

В результате получим систему уравнений Пфаффа

$$\omega_4^1 + \omega_5^1 = \omega_2, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_4^2 + \omega_5^2 = \omega_1, \quad \omega_2^1 = 0,$$

$$\omega_4^3 + \omega_5^3 = -\omega_3, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \omega_3^2, \quad \omega_2^3 = \omega_3^1, \qquad (9)$$

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^4 = \omega_1, \quad \omega_2^4 = \omega_2, \quad \omega_3^4 = \omega_3,$$

$$\omega_4^4 = -\omega_5^4, \quad \omega_5^5 = -\omega_4^5, \quad \omega_4^4 + \omega_5^5 = 0.$$

Чистое замыкание системы (9) обращается в нуль, следовательно, система (9) является вполне интегрируемой.

Рассмотрим гиперплоскость пространства $\mathcal{P}_4$, определяемую уравнением

$$\varphi \equiv x^4 - x^5 = 0. \qquad (10)$$

В силу (9) $\quad d\varphi = \theta\varphi,$

значит гиперплоскость (10) стационарна. Аналогично двумерная квадрика Q_2 стационарна:

$$Q_2: \quad \begin{cases} (x^3)^2 - 2x^1x^2 + x^4x^5 = 0 \\ x^4 - x^5 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Из (1), (11) следует, что коники конгруэнции (Q_1) инцидентны двумерной квадрике (11).

Список литературы

1. Малаховский В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.-В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.54-60.

В.П.Цапенко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ

В трехмерном проективном пространстве рассматривается частный класс конгруэнций $(P,Q)_{2,2}$, порожденных квадрикой Q и неинцидентной ей точкой P.

Изучение конгруэнции $(P,Q)_{2,2}$ проводится в подвижном репере $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, в котором вершина A_0 помещена в точку P, вершины A_1 и A_2 принадлежат касательной плоскости к поверхности (A_0) в точке A_0 и являются точками пересечения поляры точки A_0 относительно коники C с этой коникой. Здесь коникой C названа линия пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с квадрикой Q. Вершина A_3 репера помещена в полюс плоскости $A_0A_1A_2$ относительно квадрики Q.

Уравнение квадрики Q и система дифференциальных уравнений конгруэнции $(P,Q)_{2,2}$ имеют следующий вид:

$$F \equiv (x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \qquad (1)$$

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = \gamma_{3k}^0\,\omega^k, \quad \omega_i^j = \gamma_{ik}^j\,\omega^k,$$

$$\omega_i^0 = \gamma_{ik}^0\,\omega^k, \quad \omega_3^i = \gamma_{3k}^i\,\omega^k, \quad \omega_i^3 = \gamma_{ii}^3\,\omega^i + a\,\omega^j, \qquad (2)$$

$$\omega_0^0 - \omega_3^3 = \alpha_k\,\omega^k, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\,\omega_0^0 = \beta_k\,\omega^k$$